Teoria ergodyczna
WPPT IIIr. semestr zimowy 2008/9
KOLOKWIUM POPRAWKOWE

Z ROZWIĄZANIAMI

piątek, 13/02/09

We wszystkich zadaniach mamy do czynienia z układem $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$, gdzie μ jest miarą probabilistyczną na σ-ciele $\mathcal{F}$, a T transformacją zachowującą miarę μ, nie koniecznie odwracalną.

Zadanie 1. (6p)
Udowodnij, że jeśli T jest ergodyczne, to T^n (n-krotna iteracja) też. (3p)
Podaj najprostszy przykład na to, że odwrotna implikacja nie zachodzi.
(Wsk. Taki przykład istnieje na przestrzeni skończonej.) (3p).

ROZWIĄZANIE: Gdyby T nie było ergodyczne, to istniałby zbiór A o mierze ostro pomiędzy 0 a 1, T-niezmienniczy. Wtedy

$$T^{-n}(A) = T^{-1}(T^{-1}(\cdots(T^{-1}(A)\cdots)) = A$$

(z dokładnością do miary), czyli A jest T^n-niezmienniczy. Sprzeczność z ergodycznością T^n.
Przykład to $X = \{-1, 1\}$, $T(x) = -x$. Jest to ergodyczne, natomiast $T^2 = id$ nie.

Zadanie 2. (6p)
Udowodnij, że jeśli układ jest ergodyczny i $\lambda \in \mathbb{C}$, to w zespolonej przestrzeni $L^2(\mu)$, podprzestrzeń własna odpowiadająca wartości własnej λ (czyli przestrzeń funkcji f spełniających $f \circ T = \lambda f$) jest co najwyżej jednowymiarowa.
(Wsk. Wiemy już, że wtedy $|\lambda| = 1$.)

ROZWIĄZANIE: Wiemy też, że dla funkcji własnej f mamy $|f| = const \neq 0$. Weźmy więc dwie dowolne funkcje własne f_1, f_2. Funkcja $g = \frac{f_1}{f_2}$ ma sens prawie wszędzie. Wtedy $g \circ T = \frac{f_1 \circ T}{f_2 \circ T} = \frac{\lambda f_1}{\lambda f_2} = g$. Z ergodyczności $g = const$. Zatem $f_1 = const \cdot f_2$, a to oznacza, że wszystkie funkcje własne różnią się tylko stałym mnożnikiem, czyli przestrzeń własna jest jednowymiarowa. (Oczywście wszystkie powyższe równości funkcji są prawie wszędzie.)

Zadanie 3. (8p)
Na przykładzie układu Bernoulliego z miarą $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}^{\mathbb{N}_0}$ i zbioru $A = [01] \cup [10]$ (suma cylindrów nad blokami 01 i 10) wykaż, że w układzie mieszającym transformacja indunkowana nie musi być mieszająca.

ROZWIĄZANIE: Pamiętajmy, że dla transformacji indukowanej T_A zbiór A staje się „całą przestrzenią”, więc trzeba badać dwa jego podzbiory (a nie A i jakiś B, bo to nic nie da). Rozważmy $B = [01]$ i $C = [10]$. Kluczowa jest obserwacja, jak działa T_A. Niech $x \in B = [01]$. Znajdźmy w x DRUGIE zero (pierwsze jest na współrzędnej zerowej). Pomijając zdarzenie zerowe, że więcej zer nie ma, takie zero pojawia się na pewnej pozycji $k \geq 2$. Czyli $x = 011...110\ldots$, gdzie w środku mamy blok $(k-1)$ (co najmniej jednej) jedynek. Zauważmy teraz, że pierwszy moment, gdy $T^n \in A$ (czyli gdy zaczyna się albo od 01 albo od 10) następuje dokładnie dla $n = k-1$ i wtedy $T^n(x)$ zaczyna się od 10, czyli należy do C. Tak więc $T_A(B) \subset C$, czyli $B \subset T_A^{-1}(C)$. Symetrycznie dostajemy $C \subset T_A^{-1}(B)$. Składając dostajemy $B \subset T_A^{-2}(B)$. Indukcyjnie, widać, że $B \subset T_A^{-n}(C)$ dla n nieparzystych oraz $B \subset T_A^{-n}(B)$ dla n parzystych. Czyli $\mu_A(B \cap T_A^{-n}(C)) = \mu_A(B) \neq 0$ dla n parzystych i 0 dla nieparzystych. Taki ciąg nawet nie jest zbieżny, wiec nie ma co marzyć, żeby zbiegał do $\mu_A(B)\mu_A(C)$. (Można powyliczać te miary: $\mu_A(B) = \mu_A(C) = \frac{1}{2}$, ale to w sumie jest zbędne.)

Zadanie 4. (5p) Dla macierzy stochastycznej $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ znajdź odpowiednią miarę markowską. (Wystarczy wskazać początkowy wektor probabilistyczny.)

ROZWIĄZANIE: Układ równań $XM = X$ czyli $X(M - I) = 0$ jest nieoznaczony (rząd macierzy 2). Ale dochodzi równanie $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. To daje układ oznaczony, którego jedynym rozwiązaniem jest wektor $\boxed{p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})}$. Rachunki pomijam. Miara cylindra nad alfabetem trzyelementowym (powiedzmy $\{0, 1, 2\}$) jest, dla cylindra $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, równa $p_{a_1} M_{a_1,a_2} M_{a_2,a_3} \ldots M_{a_{n-1},a_n}$.